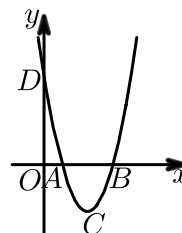


第3讲二次函数与角度存在性（加油站）

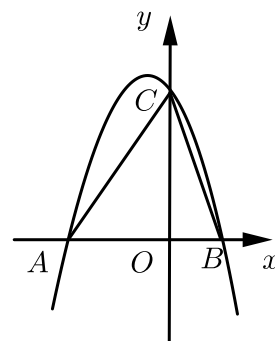
一、定角问题

1. 如图，在平面直角坐标系中，二次函数 $y = ax^2 + bx + 6$ 的图象交 x 轴于 A 、 B 两点，交 y 轴于点 D ，点 C 为抛物线的顶点，且 A 、 B 两点的横坐标分别为1和3．



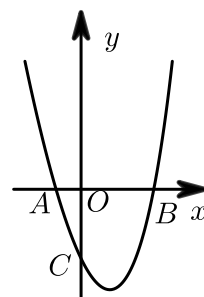
- (1) 写出 A 、 B 两点的坐标．
- (2) 求二次函数的解析式．
- (3) 在(2)的抛物线上，是否存在一点 P ，使得 $\angle BAP = 45^\circ$ ？若存在，求出点 P 的坐标；若不存在，请说明理由．

2. 如图，已知抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 与 x 轴交于点 A, B ，与 y 轴交于点 C ，且 $OA = OC$ ， $\tan \angle ABC = 3$ ， $CB = \sqrt{10}$ ，点 P 在抛物线的对称轴上。



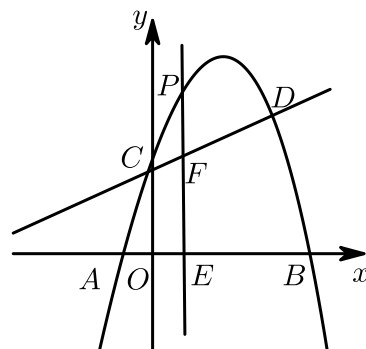
- (1) 求抛物线的解析式 .
- (2) 当直线 AP 与直线 AC 的夹角为 15° 时，求出直线 AP 的解析式 .

3. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y = ax^2 + bx - 3$ ($a \neq 0$) 与 x 轴交于点 $A(-1, 0)$ 和点 B ，且 $OB = 3OA$ ，与 y 轴交于点 C ，此抛物线顶点为点 D 。

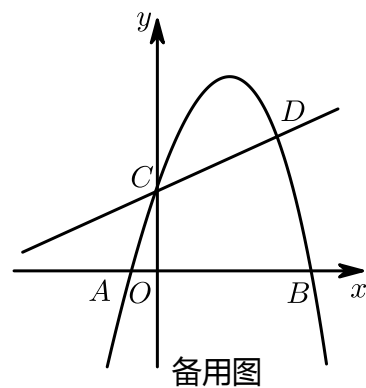


- (1) 求抛物线的表达式及点 D 的坐标。
- (2) 如果点 E 是 y 轴上的一点 (点 E 与点 C 不重合)，当 $BE \perp DE$ 时，求点 E 的坐标。
- (3) 如果点 F 是抛物线上的一点，且 $\angle FBD = 135^\circ$ ，求点 F 的坐标。

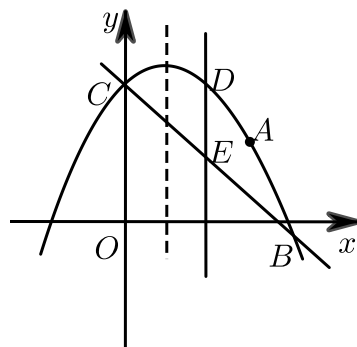
4. 如图，抛物线 $y = -x^2 + bx + c$ 与直线 $y = \frac{1}{2}x + 2$ 交于 C 、 D 两点，其中点 C 在 y 轴上，点 D 的坐标为 $(3, \frac{7}{2})$ 。点 P 是 y 轴右侧的抛物线上一动点，过点 P 作 $PE \perp x$ 轴于点 E ，交 CD 于点 F 。



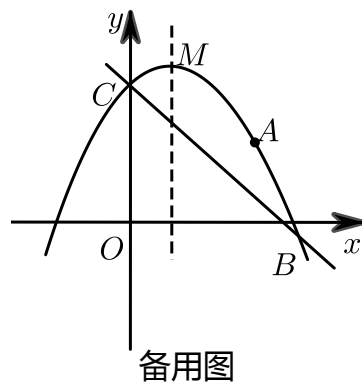
- (1) 求抛物线的解析式。
- (2) 若存在点 P ，使 $\angle PCF = 45^\circ$ ，请直接写出相应的点 P 的坐标。



5. 如图，抛物线 $y = -\frac{1}{2}x^2 + bx + c$ 过点 $A(3, 2)$ ，且与直线 $y = -x + \frac{7}{2}$ 交于 B 、 C 两点，点 B 的坐标为 $(4, m)$ 。

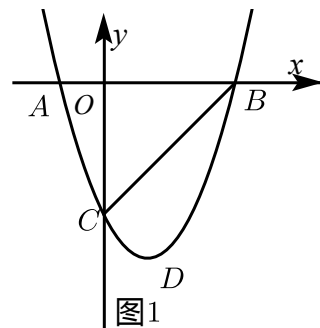


- (1) 求抛物线的解析式。
- (2) 点 D 为抛物线上位于直线 BC 上方的一点，过点 D 作 $DE \perp x$ 轴交直线 BC 于点 E ，点 P 为对称轴上一动点，当线段 DE 的长度最大时，求 $PD + PA$ 的最小值。
- (3) 设点 M 为抛物线的顶点，在 y 轴上是否存在点 Q ，使 $\angle AQM = 45^\circ$ ？若存在，求点 Q 的坐标；若不存在，请说明理由。



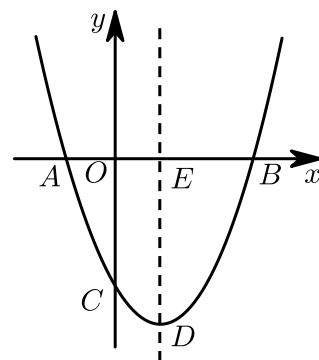
二、等角问题

6. 如图，抛物线与 x 轴交于点 A 、 $B(3, 0)$ ，与 y 轴交于点 C ，其顶点 D 的坐标为 $(1, -4)$ ， P 为抛物线上 x 轴下方一点。



- (1) 求抛物线的解析式 .
- (2) 若 $\angle PCB = \angle ACB$ ，求点 P 的坐标 .

7. 如图，抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2 + bx + c$ 与 x 轴交于 A 、 B 两点，与 y 轴交于点 C ，其对称轴交抛物线于点 D ，交 x 轴于点 E ，已知 $OB = OC = 6$ 。

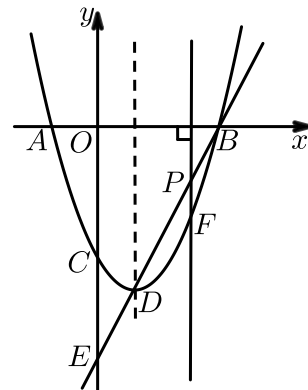


- (1) 求抛物线的解析式及点 D 的坐标。
- (2) 连接 BD ， F 为抛物线上一动点，当 $\angle FAB = \angle EDB$ 时，求点 F 的坐标。

8. 抛物线 $y = x^2 - bx + c$ 与 x 轴交于点 $A(-1, 0)$, $B(3, 0)$, 与 y 轴交于点 C , 顶点为 D , 直线 BD 与 y 轴交于点 E .

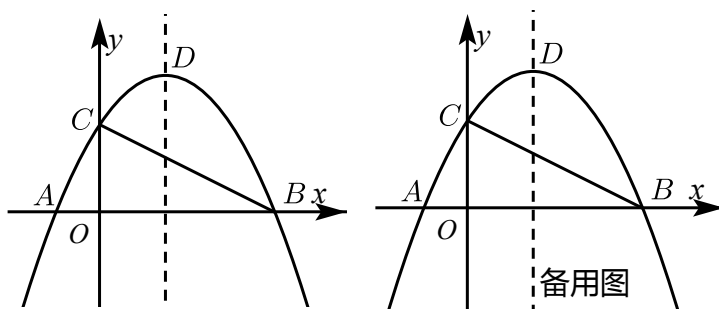
(1) 求顶点 D 的坐标.

(2) 如图, 设点 P 为线段 BD 上一动点 (点 P 不于点 B 、 D 重合), 过点 P 作 x 轴的垂线与抛物线交于点 F . 求 $\triangle BDF$ 的面积最大值.



(3) 点 Q 在线段 BD 上, 当 $\angle BDC = \angle QCE$ 时, 求点 Q 的坐标. (直接写出结果, 不必写解答过程).

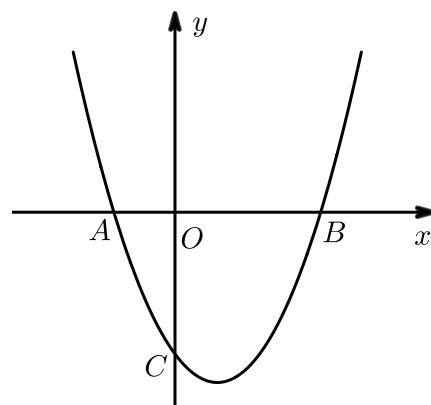
9. 如图平面直角坐标系中，抛物线 $y = ax^2 - 3ax - 4a$ 的图象经过点 $C(0, 2)$ ，交 x 轴于点 A, B （ A 点在 B 点的左侧），顶点为 D 。



- (1) 求抛物线的解析式和点 A, B 的坐标。
- (2) 将三角形 ABC 沿着直线 BC 对折，点 A 的对称点为 A' ，试着求 A' 的坐标。
- (3) 抛物线的对称轴上是否存在点 P ，使得 $\angle BPC = \angle BAC$ ？若存在，求出点 P 的坐标，若不存在，请说明理由。

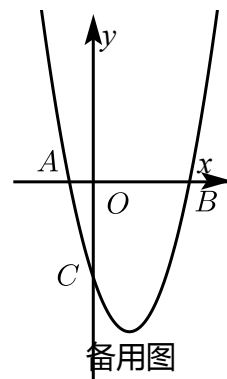
三、和差角问题

10. 如图，已知抛物线 C_1 的顶点为 $E\left(\frac{1}{2}, -\frac{9}{4}\right)$ ，与 x 轴交于点 A 、 B （点 A 在点 B 左侧），与 y 轴交于点 $C(0, -2)$ 。



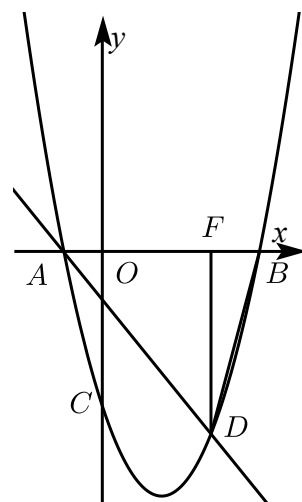
- (1) 求抛物线 C_1 的解析式 .
- (2) 点 D 是抛物线 C_1 上一点，且 $\angle ACO + \angle BCD = 45^\circ$ ，求点 D 的坐标 .

11. 如图，抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 过 $A(-1, 0)$ ， $B(6, 0)$ ， $C(0, -6)$ 。



(1) 求该抛物线的解析式。

(2) 过 D 作 $DF \perp AB$ 于 F ，连结 BD ，点 G 是抛物线上一点，使 $\angle DAG + \angle BDF = \angle BAD$ ，若存在这样的 G 点，请直接写出点 G 坐标，若不存在，请说明理由。



四、倍半角问题

12. 在平面直角坐标系中，抛物线 $y = ax^2 - 4ax + 3a (a > 0)$ 与 x 轴交于 A, B 两点（ A 点在 B 点左侧），与 y 轴交于点 C 。

（1）如图1，当 $OC = \frac{3}{2}$ 时。

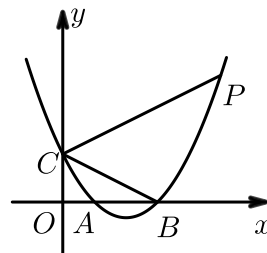
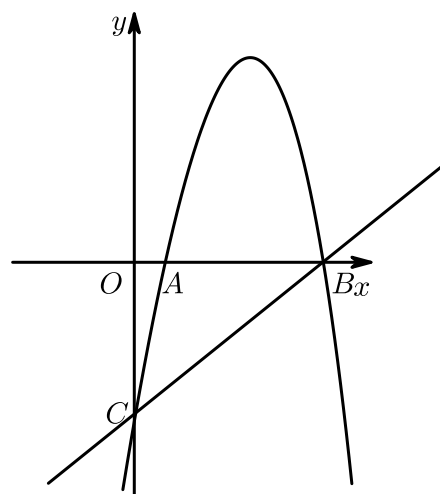


图1

① 求抛物线的表达式。

② 点 P 为 B 点右侧抛物线上一点，连接 PC ，若 $\angle BCP = 2\angle ABC$ ，求点 P 的坐标。

13. 如图，抛物线 $y = ax^2 + 6x + c$ 交 x 轴于 A, B 两点，交 y 轴于点 C 。直线 $y = x - 5$ 经过点 B, C 。

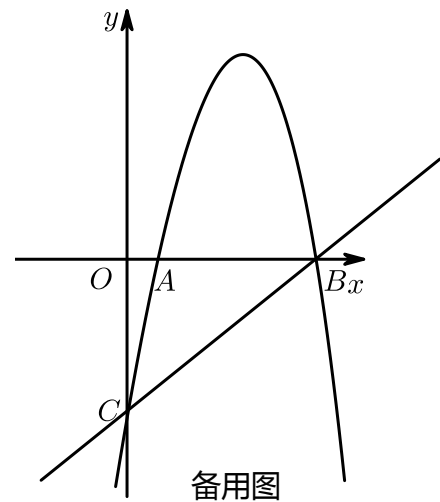


(1) 求抛物线的解析式。

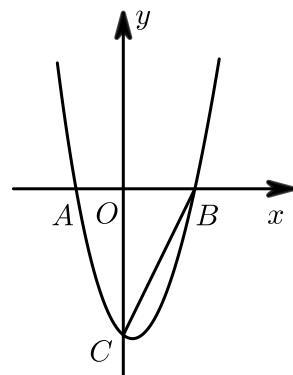
(2) 过点 A 的直线交直线 BC 于点 M 。

① 当 $AM \perp BC$ 时，过抛物线上一动点 P (不与点 B, C 重合)，作直线 AM 的平行线交直线 BC 于点 Q ，若以点 A, M, P, Q 为顶点的四边形是平行四边形，求点 P 的横坐标。

② 连接 AC ，当直线 AM 与直线 BC 的夹角等于 $\angle ACB$ 的 2 倍时，请直接写出点 M 的坐标。



14. 如图，抛物线 $y = (x - 3)(x - m)$ 交 x 轴于 A, B 两点（点 A 在原点的左侧），交 y 轴于点 C ，连接 BC ，且 $\frac{OA}{OB} = \frac{2}{3}$ 。



- (1) 求抛物线的函数表达式。
- (2) P 为线段 OC 上的一点， Q 为抛物线上的一点。
- ① 若 $\angle BPO = 2\angle BCO$ ，求点 P 的坐标。
 - ② 若 $\angle QBA = 2\angle BCO$ ，求点 Q 的坐标。